第３講　微分法・積分法①

1　放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上の原点と異なる点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ における接線と x 軸との交点を P とし，直線 AP と x 軸の正の向きとのなす角を θ とする．x 軸を，点 P のまわりに正の向きに角 2θ だけ回転させて得られる直線を L とする．次の問いに答えよ．ただし，$a\neq\pm1$ とする．

(1)　直線 L を表す式を求めよ．

(2)　直線 L と放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ との交点の x 座標の値がいずれも $\dfrac{4a}{1-a^2}$ より小さくなるような a の取り得る値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　関数　$f(x)=\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}(a+b)x^2+\frac{1}{2}(b+1)x$　を考える．

(1)　$a=0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x>-1$ において常に増加するための b の条件を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ が $x>-1$ において常に増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　2つの正方形の面積の和を $2a^2$，周の和を $8k$ とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　それぞれの正方形を1面とする2つの立方体の体積の和 V を a と k を用いて表せ．

(2)　a を正の定数とするとき，それぞれの正方形が実際に作られるための k の範囲を求めよ．

(3)　(2)の条件下で k を動かしたとき，V の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　微分法・積分法①

1　放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の原点と異なる点 $\mathrm{A}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ における接線と x 軸との交点を P とし，直線 AP と x 軸の正の向きとのなす角を θ とする．x 軸を，点 P のまわりに正の向きに角 2θ だけ回転させて得られる直線を L とする．次の問いに答えよ．ただし，$a\neq\pm1$ とする．

(1)　直線 L を表す式を求めよ．

(2)　直線 L と放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ との交点の x 座標の値がいずれも $\frac{4a}{1-a^2}$ より小さくなるような a の取り得る値の範囲を求めよ．

(1)　$y=\frac{1}{2}x^2$ より　$y'=x$

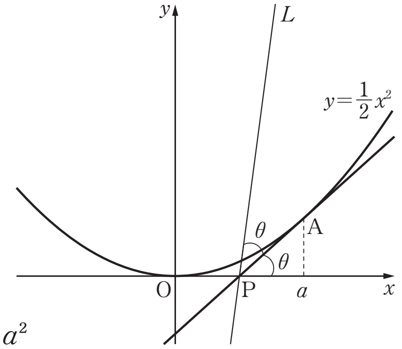
$\mathrm{A}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ における接線の方程式は　$y=a(x-a)+\frac{1}{2}a^2$　つまり　$y=ax-\frac{1}{2}a^2$

これと x 軸との交点は $a\neq0$ より　$\mathrm{P}\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$

また，$\tan\theta=a$ より，$a\neq\pm1$ のとき

$$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2a}{1-a^2}$$

よって　L：$\boldsymbol{y=\frac{2a}{1-a^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)}$



(2)　L と $y=\frac{1}{2}x^2$ の交点の x 座標は　$\frac{1}{2}x^2=\frac{2a}{1-a^2}x-\frac{a^2}{1-a^2}$

つまり　$x^2-\frac{4a}{1-a^2}x+\frac{2a^2}{1-a^2}=0$　の 2 解

$$f(x)=x^2-\frac{4a}{1-a^2}x+\frac{2a^2}{1-a^2}=\left(x-\frac{2a}{1-a^2}\right)^2-\frac{2a^2(1+a^2)}{(1-a^2)^2}$$　とおくと

$f(x)=0$ の 2 解がともに $\frac{4a}{1-a^2}$ より小さくなるのは

$f\left(\frac{4a}{1-a^2}\right)>0$　……①　かつ　軸 $<\frac{4a}{1-a^2}$　……②　かつ　(頂点の y 座標) <0　……③

のとき

①より　$\left(\frac{2a}{1-a^2}\right)^2-\frac{2a^2(1+a^2)}{(1-a^2)^2}=\frac{2a^2}{1-a^2}>0$　　よって　$a^2-1<0$ より　$-1<a<1$

②より　$\frac{2a}{1-a^2}<\frac{4a}{1-a^2}$　　$\frac{2a}{1-a^2}>0$　　$a(a-1)(a+1)<0$

よって　$a<-1,\ 0<a<1$

③より　$-\frac{2a^2(1+a^2)}{(1-a^2)^2}<0$　これはすべての実数 a で成り立つ．　以上より　$\boldsymbol{0<a<1}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　関数　$f(x)=\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}(a+b)x^2+\frac{1}{2}(b+1)x$　を考える.

(1)　$a=0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x>-1$ において常に増加するための b の条件を求めよ.

(2)　関数 $f(x)$ が $x>-1$ において常に増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ.

(1)　$a=0$ のとき　$f(x)=\frac{1}{2}bx^2+\frac{1}{2}(b+1)x$

$b=0$ のとき　$f(x)=\frac{1}{2}x$　よって，$f(x)$ はつねに増加.

$b<0$ のとき　グラフは上に凸の放物線.よって，$x>-1$ で常に増加することはなく不適.

$b>0$ のとき　グラフは下に凸の放物線.よって，(グラフの軸)$\leqq -1$ であればよい.

$$-\frac{b+1}{2b}\leqq -1 \qquad b+1\geqq 2b \qquad b\leqq 1 \qquad \text{ゆえに}\quad 0<b\leqq 1$$

以上より　**$0\leqq b\leqq 1$**

(2)　$a=0$ のときは(1)より　$0\leqq b\leqq 1$

$a\neq 0$ のときは $x>-1$ で $f'(x)\geqq 0$ であればよい.

$$f'(x)=ax^2+(a+b)x+\frac{1}{2}(b+1)=a\left(x+\frac{a+b}{2a}\right)^2-\frac{a^2+b^2-2a}{4a}$$

$a<0$ のとき　$x>-1$ で常に $f'(x)>0$ ということはなく不適.

$a>0$ のとき　(グラフの軸)$\leqq -1$　のとき　つまり　$-\frac{a+b}{2a}\leqq -1$　より　$b\geqq a$ のとき

$f'(-1)\geqq 0$ であればよい.

よって　$a-(a+b)+\frac{1}{2}(b+1)\geqq 0$ より　$b\leqq 1$

$b<a$ のとき　(頂点の y 座標)$\geqq 0$ であればよい.

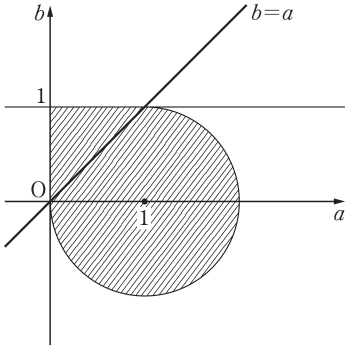
よって　$-\frac{a^2+b^2-2a}{4a}\geqq 0$　　$a^2+b^2-2a\leqq 0$　　$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

以上より　**$a=0$ のとき　$0\leqq b\leqq 1$**

$a>0$ のとき　($b\geqq a$　かつ　$b\leqq 1$)

または　($b<a$　かつ　$(a-1)^2+b^2\leqq 1$)

範囲を図示すると右図斜線部分（境界含む).



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　2つの正方形の面積の和を $2a^2$，周の和を $8k$ とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　それぞれの正方形を1面とする2つの立方体の体積の和 V を a と k を用いて表せ．

(2)　a を正の定数とするとき，それぞれの正方形が実際に作られるための k の範囲を求めよ．

(3)　(2)の条件下で k を動かしたとき，V の最小値を求めよ．

(1)　2つの正方形の1辺の長さを x，y とすると

$x^2+y^2=2a^2$　……①　　$4x+4y=8k$　……②

①より　$(x+y)^2-2xy=2a^2$　　これに②すなわち　$x+y=2k$　……③　を代入して

$4k^2-2xy=2a^2$　　よって　$xy=2k^2-a^2$　……④

ゆえに　$V=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(2k)^3-3(2k^2-a^2)\cdot 2k=\boldsymbol{-4k^3+6a^2k}$

(2)　③，④より x，y は t の2次方程式　$t^2-2kt+2k^2-a^2=0$　の2解である．

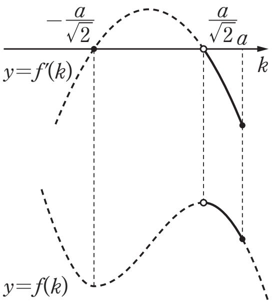
これが正の2解をもつときを考える．$f(t)=t^2-2kt+2k^2-a^2$　とおく．

$f(0)=2k^2-a^2>0$　　$k<-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{a}{\sqrt{2}}<k$

判別式 D について　$\dfrac{D}{4}=k^2-(2k^2-a^2)\geqq 0$　　$k^2\leqq a^2$　　$a>0$ より　$-a\leqq k\leqq a$

軸 >0　より　$k>0$

以上より　$\boldsymbol{\dfrac{a}{\sqrt{2}}<k\leqq a}$



(3)　$f(k)=-4k^3+6a^2k$ とおくと

$f'(k)=-12k^2+6a^2=-6(2k^2-a^2)$

よって，(2)の範囲において常に $f'(k)<0$ より

V の最小値は　$f(a)=\boldsymbol{2a^3}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　係数 a, b, c, d が実数である x の 3 次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ が極大値と極小値をとり，かつこの関数の表すグラフの極大値，極小値を与える点が原点に関して対称ならば，このグラフは原点に関して対称であることを証明せよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$f(x)=|x(x^2-1)|-x^2$ とする．

(1)　$y=f(x)$ で表される座標平面上の曲線を C とする．C と x 軸との共有点のうち x 座標が最大である点を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ の極大値と極小値を求めよ．

(3)　k を実数とする．2つの曲線 $y=|x(x^2-1)|$ と $y=x^2+k$ の共有点の個数が最大となるとき k のとり得る値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　係数 a，b，c，d が実数である x の 3 次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ が極大値と極小値をとり，かつこの関数の表すグラフの極大値，極小値を与える点が原点に関して対称ならば，このグラフは原点に関して対称であることを証明せよ．

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

極値を与える点が原点に関して対称より，その 2 点を $(p,\ q)$，$(-p,\ -q)$ とおく．

この 2 点がいずれも $y=f(x)$ 上にあることより

$q=ap^3+bp^2+cp+d$　……①

$-q=-ap^3+bp^2-cp+d$　……②

また，極値をとる点における接線の傾きは 0 より

$3ap^2+2bp+c=0$　……③

$3ap^2-2bp+c=0$　……④

①＋②より　$2bp^2+2d=0$

③－④より　$b=0$　　よって　$d=0$

したがって　$f(x)=ax^3+cx$

これは奇関数より，グラフは原点に関して対称である．

y 軸対称　→　x を $-x$ に変えても y 座標が同じ．偶関数
x 軸対称　→　y を $-y$ に変えても x 座標が同じ．奇関数
原点対称　→　$(x,\ y)$ を $(-x,\ -y)$ に変えても同じ．
である．次の問題で再度確認してほしい．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 $f(x)=|x(x^2-1)|-x^2$ とする．

(1) $y=f(x)$ で表される座標平面上の曲線を C とする．C と x 軸との共有点のうち x 座標が最大である点を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の極大値と極小値を求めよ．

(3) k を実数とする．2つの曲線 $y=|x(x^2-1)|$ と $y=x^2+k$ の共有点の個数が最大となるとき k のとり得る値の範囲を求めよ．

(1) $f(-x)=|-x(x^2-1)|-x^2=|x(x^2-1)|-x^2=f(x)$ より

$y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．

題意より x 座標が最大である点を求めるので，$x\geqq 0$ のときのみを考える．

このとき　$f(x)=x|x^2-1|-x^2=\begin{cases} x(x^2-1)-x^2=x(x^2-x-1) & (x\geqq 1) \\ -x(x^2-1)-x^2=-x(x^2+x-1) & (0\leqq x<1) \end{cases}$

$f(x)=0$ より　$x\geqq 1$ のとき　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　　$0\leqq x<1$ のとき　$x=0,\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ゆえに，x 座標が最大である点は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ 0\right)}$

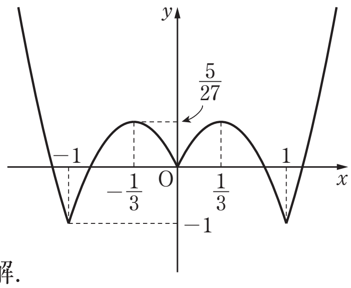
(2) $x\geqq 1$ のとき　$f(x)=x^3-x^2-x$ より　$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

よって，この範囲において $f(x)$ は単調増加である．

$0\leqq x<1$ のとき　$f(x)=-x^3-x^2+x$ より　$f'(x)=-3x^2-2x+1=-(3x-1)(x+1)$

よって，$x=\dfrac{1}{3}$ の前後で増加から減少に転じる．

以上と y 軸対称であることを考慮し，$y=f(x)$ のグラフは右図．



よって　極大値は　$f\left(\pm\dfrac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{5}{27}}$

極小値は　$f(0)=\boldsymbol{0}$，$f(\pm 1)=\boldsymbol{-1}$

(3) $y=|x(x^2-1)|$　と　$y=x^2+k$　の共有点の x 座標は

$|x(x^2-1)|=x^2+k$　すなわち　$|x(x^2-1)|-x^2=k$　の解．

よって，$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフの交点の x 座標である．

この個数の最大は 6 個であり，そのときの k の取り得る値の範囲は　$\boldsymbol{0<k<\dfrac{5}{27}}$　である．

講義でもふれたように，極値をとる x 座標は必ずしも $f'(x)=0$ から導かれるわけではない．
大切なのは $f'(x)$ の符号であり，それは $f'(x)$ のグラフによって明確になる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。